

# Az NK 68040 OTKA pályázat 2010. évi zárójelentése

Témavezető neve: DR. DARÓCZY ZOLTÁN, az MTA rendes tagja, professzor emeritus

Téma címe: *Függvényegyenletek és egyenlőtlenségek*

Kutatás időtartama: 2007.07.01–2010.06.30

A szakmai jelentés a következő részekből áll:

I. A kutatási témában 2007.07.01–2010.06.30 között végzett munka ismertetése

II. Publikációk listája

A kutatási tervben szereplő témakörökben elért új tudományos eredményeket lényegében a témakörök szerinti bontásban ismertetjük.

A publikációs lista a kutatócsoport tagjainak 2007.07.01–2010.06.30 között megjelent és megjelenés alatt lévő publikációinak listáját tartalmazza. A beszámolóban szereplő hivatkozások ezekre a listákra vonatkoznak.

A kutatási pályázat 21 senior kutató tevékenységét fogta össze és támogatta. A kutatócsoport munkájába az adott kutatási időszakban három fiatal kutató (Gselmann Eszter, Makó Zita és Varga Adrienn) is bekapcsolódott. Ők a senior kutatók irányítása mellett részben közös dolgozatokban, részben önálló cikkekkel illetve értekezéssel járultak hozzá a pályázat eredményeihez. Közös dolgozatok publikálásával további fiatal kutatókat (egyetemi és PhD-hallgatókat) is sikerült bevonni a kutatóprogram megvalósításába.

A kutatócsoport tagjai

— 2007-ben

1 monográfiát (Molnár Lajos),

25 referált tudományos dolgozatot (nemzetközi folyóiratban, vagy konferenciakiadványban),

1 PhD értekezést (Burai Pál) készítettek;

— 2008-ban

33 referált tudományos (nemzetközi folyóiratban, vagy konferenciakiadványban) dolgozatot készítettek és

1 könyvet szerkesztettek;

— 2009-ben

35 referált tudományos (nemzetközi folyóiratban, vagy konferenciakiadványban) dolgozatot,

1 PhD értekezést (Makó Zita) készítettek és

1 könyv felújított kiadását szerkesztették;

— 2010-ben

19 referált tudományos (nemzetközi folyóiratban, vagy konferenciakiadványban) dolgozatot és

1 PhD értekezést (Mészáros Fruzsina) készítettek.

— 2007. szeptemberében a kutatócsoport, a jelen pályázat, továbbá a K 62316 OTKA pályázat eszközeinek felhasználásával, 67 hazai és külföldi kutató részvételével Noszvajon konferenciát rendezett Conference on Inequalities and Applications '07 elnevezéssel.

— 2008. júniusában Numbers, Functions, Equations '08 címmel, 78 hazai és külföldi kutató részvételével konferenciát rendeztünk Kátai Imre és Daróczy Zoltán akadémikusok 70. születésnapja tiszteletére.

— 2008. februárjában Poroszlón és 2010. februárjában Zamárdiban megrendeztük a 8., illetve 10. Debrecen–Katowice Téli Szemináriumot, amelyen mindkét alkalommal 12-12 debreceni, illetve katowicei kutató vett részt.

— A fenti rendezvényeken túl számos külföldi kutatóhelyről látogattak el Debrecenbe és tartottak (nem ritkán több) előadást. Ezeknek, és a debreceni kutatók hasonló látogatásainak köszönhetően a debreceni kutatócsoport széleskörű tudományos együttműködést épített ki a következő kutatóhelyekkel: Katowice, Bielsko-Biala (Lengyelország); Ljubljana, Maribor (Szlovénia). A kutatási időszakban több társszerzős dolgozat készült ezen egyetem kutatóival.

Az alábbiakban kutatási irányonként csoportosítva és részletezve ismertetjük a kutatócsoport eddigi tevékenységét.

**1. Algebrai struktúrákon értelmezett függvényegyenletek.** Kvantumstruktúrákkal kapcsolatban leírtuk az obszervábilisek terének Gudder-féle rendezést megőrző transzformációit [32]. Meghatároztuk adott Neumann-algebrákhoz tartozó obszervábilisek tereinek a maximális szórást megőrző lineáris bijekcióit [92]. Leírtuk Hilbert-tér effektek terén a spektrális rendezést valamint a keveréket megőrző bijekciókat ([99], [95]). Megmutattuk, hogy a kvantum-állapotok terének azon bijektív leképezései, amik megőrzik a relatív entropiát mind unitér vagy antiunitér operátorból származtathatók [85]. Ezen eredményünket később kiterjesztettük olyan leképezések esetére is, melyekről nincs feltételezve a bijektivitás [94]. Leírtuk az állapotok terének a Jensen-Shannon divergenciát megőrző bijekcióit [96].

Hilbert-tér pozitív szemidefinit operátorai terén meghatároztuk a geometriai-közepet, a harmonikus-közepet, a párhuzamos összeget, illetve a Lebesgue-felbontást megőrző bijektív transzformációkat ([88], [89], [90]). Leírtuk a pozitív definit operátorok terének Thompson- és Hilbert-izometriáit abban az esetben ha az alapul vett Hilbert-tér legalább 3-dimenziós [91]. Eredményünket később sikerült kiterjeszteni a 2-dimenziós esetre is [93].

Meghatároztuk a valószínűségi eloszlásfüggvények terének Kolmogorov–Szmirnov metrikára vonatkozó izometriáit [33], valamint leírtuk a korlátos frame-függvények terének izometriáit [84].

Igazoltuk egy korábbi sejtésünket Hilbert-tér adott dimenziós alterein értelmezett olyan transzformációk szerkezetére vonatkozóan, melyek megőrzik az ún. principális szögeket [86].

A Hilbert-tér projekciók terén bevezettünk egy kvantummechanikai motivációjú új metriát (Santos-metrika) és leírtuk a kapcsolódó izometriákat [97].

Meghatároztuk az önadjungált operátorok terén az 1-hosszúságú absztrakt elemi operátorokat a linearitás feltételezése nélkül [98]. Leírtuk mátrixalgebrák azon lineáris leképezéseit, melyek megőrzik a konstans faktor erejéig való kommutálás relációját [87].

2007-ben a Springer Kiadó Lecture Notes in Mathematics sorozatában megjelentette Molnár Lajos korábbi munkásságát áttekintő monográfiáját [83].

Speciális algebrai struktúrákon vizsgáltuk a Hosszú-féle függvényegyenletet és meghatároztuk pexiderizált változatának összes megoldását [58]. A Hosszú-féle függvényegyenletet a Gauss- és az Einsenstein-egészek halmaza felett is megoldottuk [43].

Vizsgáltuk a spektrálszintézis teljesülését kompakt csoportokon. Eredményeink alkalmazásaként meghatároztuk a D'Alembert-féle függvényegyenlet folytonos megoldásait kompakt csoportokon [111]. Bebizonyítottuk, hogy egy diszkrét Abel-csoporton spektrálszintézis akkor és csak akkor teljesül, ha a csoport torzió-mentes rangja véges [57].

Függvényegyenletek hipercsoportokra való értelmezését, vizsgálatát kezdeményezte Székelyhidi kezdeményezte egy 2003-as dolgozatában. A témakör legújabb fejleményeként meghatároztuk a többváltozós polinomiális hipercsoportok additív illetve exponenciális függvényeit, továbbá megmutattuk, hogy ezeken a struktúrákon teljesül a spektrál-analízis és a spektrál-szintézis [112]. Meghatároztuk a Sturm–Liouville típusú hipercsoportok additív, exponenciális és momentum-függvényeit is [106].

A valószínűségeloszlások karakterizációs problémái alapvető, a függvényegyenletek elméletével megválaszolható kérdéseket vetnek fel. Lukács klasszikus eredménye szerint két független valószínűségi változó akkor és csak akkor normális eloszlású, ha összegük és különbségük független. A  $\beta$  és  $\gamma$  eloszlásokra vonatkozó ezzel analóg tételeket sikerült igazolni a [59], [60], [61], [100] és [101] dolgozatokban. Az módszerek és eredmények a Járai-féle regularitási elmélet eszközeit intenzíven és mélyen felhasználják. Mészáros Fruzsina Ph.D. értekezése [102] is ebben a témakörben készült.

**2. Függvényösszetételeket tartalmazó egyenletek és alkalmazásaik a középértékek elméletében.** Jelentős előrehaladás történt a különféle középértékosztályokra vonatkozó Matkowski–Sutó típusú problémák, illetve invariancia egyenletek megoldásában. Ez megnyitotta annak lehetőségét, hogy súlyozott kvázi-aritmetikai közepeket tartalmazó függvényegyenleteket igen behatóan vizsgáljunk. Ennek kapcsán a valós függvények elméletének klasszikus fogalomalkotásai és eredményei is felhasználásra kerültek. Az egyik többféle szempontból is vizsgált függvényösszetételeket is tartalmazó egyenlet az ún. invariancia egyenlet, amelyet több középértékosztályokban sikerült megoldani. A [5], illetve [8] dolgozatokban az invariancia egyenletet Gini, illetve Stolarsky közepekre (amelyek a hatványközepek fogalmát általánosítják kétféle módon) oldottuk meg computeralgebrai eszközöket (a Maple V programcsomagot) felhasználva. Az itt alkalmazott módszer újszerűsége és alkalmazhatósága várhatóan további hasonló problémák megoldásához is elvezethet. [6]-ban az invariancia egyenletet a Matkowski által bevezetett általánosított kváziaritmetikai közepekre oldottuk meg négyszeri differenciálhatósági feltevések mellett. Nyitott kérdés, hogy az itteni regularitási feltevések gyengíthetők-e. Az invariancia egyenletet a kváziaritmetikai közepek egy másik fajta (egy függvénnyel és egy mértékkel meghatározott) általánosítására nézve oldottuk meg a [81] dolgozatban. Ugyanebben a középértékosztályban az egyenlőség problémát is sikerült megoldani [80]-ban.

Az invariancia egyenlet során fellépő függvényösszetétel-mentes egyenletek vizsgálata során is lényeges eredmények születtek. A [20], [22], [25], [26], [27], [28], [29], [113], [114] dolgozatokban a regularitási feltételek gyengítésével a legáltalánosabb megoldások meghatározása is sikerült. Súlyozott számtani közepeket és azok Gauss-kompozícióját tartalmazó

függvényegyenletek ekvivalenciáját a súly-paraméterek algebrai tulajdonságaival jellemeztük a [30] dolgozatban. Az ebben a témakörben elért eredményeiből készítette Burai Pál és Makó Zita PhD értekezését ([19], [79]).

Két függvénytől és egy valószínűségi mértéktől függő kétváltozós középértékek osztályában a homogén közepek a leírásban is több eredmény született. Itt lényeges eltérés van (változóknak) szimmetrikus közepek és a nem szimmetrikus eset között. A szimmetrikus eset lényegesen nehezebb, itt a szereplő függvények hatszori folytonos differenciálhatósága mellett sikerült meghatározni két speciális mérték esetén a homogén közepeket [68]. A nem szimmetrikus közepeknél a generáló függvények háromszori differenciálhatóságát tételeztük fel. Ez esetben sikerült tetszőleges, egy alkalmas momentumfeltételt teljesítő valószínűségi mérték esetén megtalálni az összes homogén közepet [67].

A kváziaritmetikai közepek Aczél-féle általánosításában bevezetett biszimmetria-egyenlet vizsgálata is újabb vizsgálatokat inspirált. Ezeknek a vizsgálatoknak az eredményét, amelyek kiterjesztési tételek állítanak a biszimmetria-egyenletre nézve, a [53], [54] és [55] dolgozatok tartalmazzák.

Információelméleti háttérű függvényegyenletekkel több dolgozatban is foglalkozunk. Megadtuk a Shannontól származó entrópia egyenlet általános és folytonos megoldásait, és ezek általánosítását [41]. Eredményeket értünk el a paraméteres információ alapegyenlettel kapcsolatban, ezeknek pedig következményei vannak bizonyos rekurzív információmértékek stabilitására vonatkozóan [42].

Egy Marshall és Olkin által felvetett probléma megoldásaként jellemeztük az exponenciális eloszlást, függvényegyenletes eszközöket használva [75]. A polinomfüggvények integrálegyenletekkel való jellemzését találtuk [107]-ban. Egy a Shannon és Rényi entropiákkal kapcsolatos függvényegyenlet folytonos és általános megoldásait is leírtuk [1].

**3. Egyenlőtlenségek, általánosított konvexitás.** Részben pályázatunk résztvevőinek szerkesztésében, a Birkhäuser Kiadó gondozásában jelent meg a General Inequalities konferenciasorozat 2007. évi rendezvényének, a kutatócsoportunk által szervezett Conference on Inequalities and Applications '07 konferencia bizonyos résztvevőinek dolgozatait tartalmazó Inequalities and Applications című kötet [10].

Az Hermite–Hadamard egyenlőtlenséget, amely egy konvex függvény integrálátlaga és bizonyos függvényértékei között teljesül, többféle képpen általánosítottuk. A szimplexeken teljesülő Hermite–Hadamard egyenlőtlenségeket igazoltunk a [11] cikkben. Csebisev, illetve Beckenbach-rendszerekre nézve konvex függvényekkel kapcsolatos Hermite–Hadamard egyenlőtlenségeket bizonyítottunk [12]-ben és [13]-ben. Az Hermite–Hadamard egyenlőtlenségről konstans hibatag esetén Nikodem, Riedel és Sahoo megmutatta, hogy nem stabil. Azonban ha a hibatag a változóknak elsőfokú homogén függvénye, akkor [52]-ben kimutattuk, hogy az Hermite–Hadamard egyenlőtlenség stabil marad. A magasabb-rendű konvexitás jellemzését hasonló rendű Hermite–Hadamard egyenlőtlenségekkel sikerült kimutatni [14]-ben. Az Hermite–Hadamard egyenlőtlenség általánosításának határait sikerült tisztázni [34]-ben.

Házy és Páles egy 2004-es cikkében a közelítőleg Jensen és közelítőleg konvex függvények kapcsolatát tárta fel és ebben az ún. Takagi-függvény szerepét (ami egy közismert folytonos, de seholsem differenciálható függvény). Eredményük  $t$ -konvex függvényekre való általánosítása található a [44], [45] dolgozatokban. A  $t$ -konvexitás vizsgálatánál fellépő hibabecslés élességének igazolásához a Takagi, vagy más néven Van der Waerden-féle függvény Páles

által 2003-ban megsejtett közelítő-konvexitási tulajdonságait a [15] dolgozatban igazoltuk. Ezt az eredményt általánosítva, a Takagi-típusú függvények széles osztályában igazoltuk a megfelelő közelítő-konvexitási tulajdonságot [78].

A Beckenbach-féle konvexitással kapcsolatos Hahn–Banach-típusú elválasztási tételeket nyertünk a [103] cikkben. A kétdimenziós konvex halmazok feletti Beckenbach-családok szerint vett konvex függvények regularitási tulajdonságát vizsgáltuk [2]-ben.

A Jensen-konvexitás és konvexitás kapcsolatát leíró alapvető Bernstein–Doetsch-tételt sikerült kiterjeszteni  $s$ -konvex, Breckner-féle  $s$ -konvex és Orlicz-konvex függvényekre a [23], [24], [47], [49], [50] és [51] dolgozatokban. A  $t$ -kváziaffin függvények tulajdonságait vizsgáltuk [104]-ban.

Több eredménnyel járultunk hozzá az általánosított konvex függvények elméletéhez. Jensen konvexitási fogalmából, valamint annak Wright és Popoviciu által tekintett általánosításából kiindulva új értelemben vett magasabb rendben konvex függvények osztályait definiáltuk és írtuk le szisztematikusan [36]-ban. Sikerült megtalálni és igazolni a magasabbrendben Wight-konvex függvények dekompozíciós tételét, amely szerint az ilyen függvények előállnak egy ugyanolyan rendben konvex és egy kisebb fokú általánosított polinom összegeként [76].

A nemkonvexitás egy új jellemzésével többféle kváziaritmetikai középből összetett közepek összehasonlítási problémáját sikerült megoldani [31]-ban. A kvzitaritmetikai közepek nem-egyenlő súlyok melletti összehasonlíthatóságának feltételeit találtuk [77]-ban. Az ún.  $L$ -konjugált közepek összehasonlításának szükséges és elegendő feltételeit [9]-ben dolgoztuk ki.

A Hahn–Banach féle elválasztási tételt kiterjesztettük olyan halmazok lokális szeparációjára, amelyek konvex halmazok differenciálható függvény szerint vett inverz képeként állnak elő [7]. Ebből az eredményből a Lagrange-féle multiplikátor-tétel is azonnal következik.

A két függvénnyel és egy mértékkel meghatározott közepek osztályának összehasonlítási problémáját is megoldottuk [70]-ban. A vizsgálatok újszerűsége a közepek egyenlőségére vonatkozó invariánsok bevezetése, és a feltételek egy részének ezek segítségével való megfogalmazása. A paraméteres közepek egy osztályában az összehasonlítás feltételeit [21]-ban sikerült leírni. Stolarsky-közepekből képzett hányadosok összehasonlításában [69]-ben értünk el eredményeket.

**4. Stabilitáselmélet.** A függvényegyenletek stabilitáselméletének alapproblémája annak igazolása, hogy ha egy egyenlet jobb és baloldala valamilyen értelemben kicsit tér el egymástól, akkor az ismeretlen függvények közel vannak a pontos egyenlet valamilyen megoldásához. A témakör alaperedménye a Cauchy-függvényegyenlet Hyers–Ulam-féle stabilitási tétele. Ennek a tételnek számos más függvényegyenletre vonatkozó általánosítása ismert.

Egy iteratív függvényegyenletre vonatkozó stabilitási tétel segítségével igazoltuk a Cauchy-egyenlet és más függvényegyenletek Hyers–Ulam értelemben vett stabilitását grupoidokon értelmezett grupoidokba képező függvények esetén [35].

Igazoltuk az információ paraméteres alapegyenletének stabilitását illetve hiperstabilitását a paraméter értékétől illetve az egyenlet valamint az ismeretlen függvény értelmezési tartományától függően ([40], [38], [39], [42]).

Bizonyos alapvető síkbeli algebrai görbék esetén megmutattuk, hogy ha egy valós additív függvény a tekintett görbe egy szakaszán korlátos hibával teljesíti a derivációk feltételes (vagy egyváltozós) egyenletét, akkor előáll egy deriváció és egy lineáris függvény összegeként. Ebből stabilitási tételt nyertünk a derivációk ilyen jellegű karakterizációira [16].

**5. Általánosított metrikák.** Megmutattuk, hogy egy véges dimenziós valós vektortéren adott pozitív, pozitív homogén és a nemzérus vektorok halmazán sima normából származó metrikus tenzor nemelfajultsága pozitív definitiséget von maga után [72].

Új interpretációt adtunk az Ehresmann-konnexiók néhány fontos geometriai adatára (tenzió, erős torzió) [108]. „Jó” metrikus deriváltak egy családját határoztuk meg a Moór–Vanstone-féle általánosított Finsler-metrikák esetén; a „jóság” – informálisan – azt jelenti, hogy a kovariáns derivált természetes módon csatolt egy, csakis a metrikus tenzortól függő, Ehresmann-konnexióhoz [73].

Bemutattuk, hogyan építhető ki differenciálkalkulus olyan végtelen dimenziós sokaságon, amelynek modelltere (Hilbert- vagy Banach-tér helyett) általános lokálisan konvex topologikus vektortér. Technikailag az ismerteknél részletesebben kidolgozott bizonyítást adtunk a differenciáloperátorokat koordinátamentesen jellemző Peetre–Carleson-tételre. Megmutattuk, hogy a Chern–Rund-féle kovariáns deriválás interpretálható a bázissokaság fölötti differenciáloperátorként [110]. Az érintő nyálábokon való kalkulussal és a projektív metrizálhatósággal kapcsolatban [109]-ban értünk el eredményeket.

**6. Egyéb kutatások.** Ezen címszó alatt olyan kutatásokról és eredményekről számolunk be, amelyek megfelelnek a kutatási programnak, de nem tartoznak a fenti nagyobb témakörökbe. Ugyancsak megemlítjük azokat a közleményeket, amelyek témájukat tekintve nem szerepeltek az eredeti pályázati tervben, de amelyeket a pályázat eszközei segítettek a megvalósulásukban.

Gilányi Attila szerkesztésében újra megjelentettük Marek Kuczma [56] könyvét, amely mára a függvényegyenletek és egyenlőtlenségek elméletének világszerte ismert és alapvető kézikönyve lett.

Új, elegendő feltételt adtunk arra, hogy egy valószínűsíthető reciprok polinom összes zérushelye az egységkörvonalon legyen [65]. Találtunk egy páratlan fokszámú self-inverzív polinom együtthatóira vonatkozó egyenlőtlenséget, melynek teljesülése esetén a polinom összes zérushelye az egységkörvonalon van [66], [71].

A [63] és [64] cikkek témája az öröklődő gráfalgebrák Grothendieck csoportján értelmezett Coxeter transzformáció spektrális tulajdonságainak vizsgálata. Ezzel kapcsolatban sikerült belátni, hogy a körmentesen irányított általánosított csillag gráfokhoz tartozó spektrális sugarak Salem számok, valamint megadni a gráfokhoz tartozó spektrális sugarak felső és alsó korlátját, és bizonyos irányított gráfokhoz tartozó spektrális sugár változásokat.

Vizsgáltuk, hogy két reláció metszetes konvolúciója a tekintett relációk mely alapvető tulajdonságait örökli meg [18]. A parciálisan rendezett halmazokbeli teljességfogalmakat elemeztük [17]-ben.

A KUTATÓCSOPORT ÁLTAL 2007–2010-BEN MEGJELENTETETT  
TUDOMÁNYOS DOLGOZATOK, DISSZERTÁCIÓK

- [1] A. E. Abbas, E. Gselmann, Gy. Maksa, and Z. Sun. General and continuous solutions of the entropy equation. In *Proceedings of the 28th International Workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering*, volume 1073, pages 3–7. American Institute of Physics, 2008.
- [2] M. Adamek, A. Gilányi, K. Nikodem, and Zs. Páles. A note on three-parameter families and generalized convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 330(2):829–835, 2007.
- [3] N. K. Agbeko and A. Háy. An algorithmic determination of optimal measure from data and an application. In *Proc. MicroCAD 2010 Int. Sci. Conf.*, volume H, pages 17–22, 2010.
- [4] N. K. Agbeko and A. Háy. An algorithmic determination of optimal measure from data and some applications. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyíregyháziensis*, 26(1):99–111, 2010.
- [5] Sz. Baják and Zs. Páles. Computer aided solution of the invariance equation for two-variable Gini means. *Comput. Math. Appl.*, 58:334–340, 2009.
- [6] Sz. Baják and Zs. Páles. Invariance equation for generalized quasi-arithmetic means. *Aequationes Math.*, 77(1-2):133–145, 2009.
- [7] Sz. Baják and Zs. Páles. Separation theorem for non-linear inverse images of convex sets. *Acta Math. Hungar.*, 124(1-2):125–144, 2009.
- [8] Sz. Baják and Zs. Páles. Computer aided solution of the invariance equation for two-variable Stolarsky means. *Appl. Math. Comput.*, 216:3219–3227, 2010.
- [9] M. Klaričić Bakula, Zs. Páles, and J. Pečarić. On weighted  $L$ -conjugate means. *Commun. Appl. Anal.*, 11(1):95–110, 2007.
- [10] C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, M. Plum, and Zs. Páles, editors. *Inequalities and Applications*, volume 157 of *Internat. Ser. Numer. Math.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [11] M. Bessenyei. The Hermite–Hadamard inequality on simplices. *Amer. Math. Monthly*, 115(4):339–345, 2008.
- [12] M. Bessenyei. Hermite–Hadamard-type inequalities for generalized convex functions. *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 9(3):Article 63, pp. 51 (electronic), 2008.
- [13] M. Bessenyei. The Hermite–Hadamard inequality in Beckenbach’s setting. *J. Math. Anal. Appl.*, 364(2):366–383, 2010.
- [14] M. Bessenyei and Zs. Páles. Characterization of higher-order monotonicity via integral inequalities. *Proc. R. Soc. Edinburgh Sect. A*, (1), 2010.
- [15] Z. Boros. An inequality for the Takagi function. *Math. Inequal. Appl.*, 11(4):757–765, 2008.
- [16] Z. Boros and E. Gselmann. Hyers–Ulam stability of derivations and linear functions. *Aequationes Math.*, 2010. accepted.
- [17] Z. Boros and Á. Szász. Infimum and supremum completeness properties of ordered sets without axioms. *An. Ştiinţ. Univ. Ovidius Constanţa Ser. Mat.*, 16(2):31–37, 2008.
- [18] Z. Boros and Á. Szász. Reflexivity, transitivity, symmetry and anti-symmetry of the intersection convolution of relations. *Rostock. Math. Kolloq.*, (63):55–62, 2008.
- [19] P. Burai. *Középértékeket tartalmazó függvényegyenletek*. Ph.d. thesis, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2007.
- [20] P. Burai. A Matkowski–Sutô type equation. *Publ. Math. Debrecen*, 70:233–247, 2007.
- [21] P. Burai. Comparability of certain homogeneous means. In C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, M. Plum, and Zs. Páles, editors, *Inequalities and Applications (Noszvaj, 2007)*, volume 157 of *International Series of Numerical Mathematics*, pages 229–232. Birkhäuser Verlag, 2008.
- [22] P. Burai. On the equivalence of functional equations involving means and solution to a problem of Daróczy. *Aequationes Math.*, 75(3):314–319, 2008.
- [23] P. Burai and A. Háy. On Orlicz-convex functions. In *Proc. 12th Symp. Math. Appl. (November 5-7, 2009)*, pages 73–79, University of Timişoara, 2010. Editura Politehnica.
- [24] P. Burai, A. Háy, and T. Juhász. Bernstein–Doetsch type results for  $s$ -convex functions. *Publ. Math. Debrecen*, 75(1-2):23–31, 2009.
- [25] Z. Daróczy. Functional equations involving quasi-arithmetic means and their Gauss composition. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 27:45–55, 2007.

- [26] Z. Daróczy. On a family of functional equations with one parameter. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 28:175–181, 2008.
- [27] Z. Daróczy. Mean values and functional equations. *Differ. Equ. Dyn. Syst.*, 17(1-2):105–113, 2009.
- [28] Z. Daróczy and J. Dascăl. On the general solution of a family of functional equations with two parameters and its application. *Math. Pannon.*, 20(1):27–36, 2009.
- [29] Z. Daróczy and M. Laczkovich. On functions taking the same value on many pairs of points. *Real Anal. Exchange*, 33(2):385–393, 2008.
- [30] Z. Daróczy, K. Lajkó, R. L. Lovas, Gy. Maksa, and Zs. Páles. Functional equations involving means. *Acta Math. Hungar.*, 116(1-2):79–87, 2007.
- [31] Z. Daróczy and Zs. Páles. A characterization of nonconvexity and its applications in the theory of quasi-arithmetic means. In C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, M. Plum, and Zs. Páles, editors, *Inequalities and Applications (Noszvaj, 2007)*, volume 157 of *International Series of Numerical Mathematics*, pages 251–260. Birkhäuser Verlag, 2008.
- [32] G. Dolinar and L. Molnár. Maps on quantum observables preserving the Gudder order. *Rep. Math. Phys.*, 60(1):159–166, 2007.
- [33] G. Dolinar and L. Molnár. Isometries of the space of distribution functions with respect to the Kolmogorov-Smirnov metric. *J. Math. Anal. Appl.*, 348(1):494–498, 2008.
- [34] A. M. Fink and Zs. Páles. What is Hadamard’s inequality? *Appl. Anal. Discrete Math.*, 1:29–35, 2007.
- [35] A. Gilányi, Z. Kaiser, and Zs. Páles. Estimates to the stability of functional equations. *Aequationes Math.*, 73(1-2):125–143, 2007.
- [36] A. Gilányi and Zs. Páles. On convex functions of higher order. *Math. Inequal. Appl.*, 11(2):271–282, 2008.
- [37] E. Gselmann. On the modified entropy equation. *Banach J. Math. Anal.*, 2(1):84–96, 2008.
- [38] E. Gselmann. Hyperstability of a functional equation. *Acta Math. Hungar.*, 112, 2009.
- [39] E. Gselmann. Recent results on the parametric fundamental equation of information. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.)*, 25(1):65–84, 2009.
- [40] E. Gselmann. Stability type results concerning the fundamental equation of information of multiplicative type. *Colloq. Math.*, 114(1):33–40, 2009.
- [41] E. Gselmann and Gy. Maksa. The Shannon field of non-negative information functions. *Sci. Math. Jpn.*, 69(2):241–248, 2009.
- [42] E. Gselmann and Gy. Maksa. Stability of the parametric fundamental equation of information for nonpositive parameters. *Aequationes Math.*, 78(3):271–282, 2009.
- [43] G. Hajdu and L. Hajdu. Hosszú’s equation over the Gaussian and Eisenstein integers. *Aequationes Math.*, 75(1-2):65–74, 2008.
- [44] A. Házy. On stability of  $t$ -convexity. In *Proc. MicroCAD 2007 Int. Sci. Conf.*, volume G, pages 23–28, 2007.
- [45] A. Házy. On the stability of  $t$ -convex functions. *Aequationes Math.*, 74(3):210–218, 2007.
- [46] A. Házy. On a certain stability of the Hermite–Hadamard inequality. In *Proc. MicroCAD 2008 Int. Sci. Conf.*, volume G, pages 9–14, 2008.
- [47] A. Házy. Bernstein–Doetsch type results for Breckner  $s$ -convex functions. In *Proc. MicroCAD 2009 Int. Sci. Conf.*, volume G, pages 17–22, 2009.
- [48] A. Házy. Inequalities for  $s$ -convex functions. In *Proc. MicroCAD 2009 Int. Sci. Conf.*, volume G, pages 23–28, 2009.
- [49] A. Házy. Bernstein–Doetsch type results for generalized approximately convex functions. In *Proc. MicroCAD 2010 Int. Sci. Conf.*, volume H, pages 27–32, 2010.
- [50] A. Házy. Bernstein–Doetsch type results for  $h$ -convex functions. *Math. Inequal. Appl.*, 2010.
- [51] A. Házy and P. Burai. Bernstein–Doetsch type results for generalized convex function. In *Proc. 12th Symp. Math. Appl. (November 5-7, 2009)*, pages 118–123, University of Timișoara, 2010. Editura Politehnica.
- [52] A. Házy and Zs. Páles. On a certain stability of the Hermite–Hadamard inequality. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 465(2102):571–583, 2009.
- [53] I. Kocsis. A bisymmetry equation on restricted domain. *Aequationes Math.*, 73(3):280–284, 2007.
- [54] I. Kocsis. Generalized bisymmetry on a restricted domain. *Acta Math. Hungar.*, 118(4):307–312, 2008.



- [55] I. Kocsis. Solution of a bisymmetry equation on a restricted domain. *Publ. Math. Debrecen*, 75(1-2):167–172, 2009.
- [56] M. Kuczma. *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality*. Birkhäuser Verlag, 2nd edition, 2009.
- [57] M. Laczkovich and L. Székelyhidi. Spectral synthesis on discrete abelian groups. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 143(1):103–120, 2007.
- [58] K. Lajkó, Gy. Maksa, and F. Mészáros. On a generalized Hosszú functional equation. *Publ. Math. Debrecen*, 74(1-2):101–106, 2009.
- [59] K. Lajkó and F. Mészáros. Functional equations arisen from the characterization of beta distributions. *Aequationes Math.*, 78(1-2):87–99, 2009.
- [60] K. Lajkó and F. Mészáros. Functional equations stemming from probability theory. *Tatra Mountains Mat. Publ.*, 44:65–80, 2009.
- [61] K. Lajkó and F. Mészáros. Some new functional equations connected with characterization problems. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.)*, 25(2):221–239, 2009.
- [62] P. Lakatos. On finite  $p$ -groups with cyclic characteristic series. *Publ. Math. Debrecen*, 74:187–193, 2009.
- [63] P. Lakatos. Spectral properties of Coxeter transformation. *Southeast Asian Bull. Math.*, 33:1105–1112, 2009.
- [64] P. Lakatos. Salem numbers defined by Coxeter transformation. *Lin. Alg. Appl.*, 432(1):144–154, 2010.
- [65] P. Lakatos and L. Losonczi. Circular interlacing with reciprocal polynomials. *Math. Inequal. Appl.*, 10(4):761–769, 2007.
- [66] P. Lakatos and L. Losonczi. Polynomials with all zeros on the unit circle. *Acta Math. Hungar.*, 125:341–356, 2009.
- [67] L. Losonczi. Homogeneous non-symmetric means of two variables. *Demonstratio Math.*, 40(1):169–180, 2007.
- [68] L. Losonczi. Homogeneous symmetric means of two variables. *Aequationes Math.*, 74(3):262–281, 2007.
- [69] L. Losonczi. Ratio of Stolarsky means: monotonicity and comparison. *Publ. Math. Debrecen*, 75(1-2):221–238, 2009.
- [70] L. Losonczi and Zs. Páles. Comparison of means generated by two functions and a measure. *J. Math. Anal. Appl.*, 345(1):135–146, 2008.
- [71] L. Losonczi and A. Schinzel. Self-inversive polynomials of odd degree. *Ramanujan J.*, 14(2):305–320, 2007.
- [72] R. L. Lovas. A note on Finsler-Minkowski norms. *Houston J. Math.*, 33(3):701–707, 2007.
- [73] R. L. Lovas, J. Pék, and J. Szilasi. Ehresmann connections, metrics and good metric derivatives. In *Finsler geometry, Sapporo 2005—in memory of Makoto Matsumoto*, volume 48 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 263–308. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007.
- [74] Gy. Maksa. The stability of the entropy of degree alpha. *J. Math. Anal. Appl.*, 346(1):17–21, 2008.
- [75] Gy. Maksa and F. Mészáros. A characterization of the exponential distribution through functional equations. In C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, M. Plum, and Zs. Páles, editors, *Inequalities and Applications (Noszvaj, 2007)*, volume 157 of *International Series of Numerical Mathematics*, pages 291–298. Birkhäuser Verlag, 2008.
- [76] Gy. Maksa and Zs. Páles. Decomposition of higher-order Wright-convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 359:439–443, 2009.
- [77] Gy. Maksa and Zs. Páles. Remarks on the comparison of weighted quasi-arithmetic means. *Colloq. Math.*, 120(1):77–84, 2010.
- [78] J. Makó and Zs. Páles. Approximate convexity of Takagi type functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 369:545–554, 2010.
- [79] Z. Makó. *On the equality and invariance problem of two variable means and perturbation of monotonic functions*. Phd thesis, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2009.
- [80] Z. Makó and Zs. Páles. On the equality of generalized quasiarithmetic means. *Publ. Math. Debrecen*, 72(3-4):407–440, 2008.
- [81] Z. Makó and Zs. Páles. The invariance of the arithmetic mean with respect to generalized quasi-arithmetic means. *J. Math. Anal. Appl.*, 353:8–23, 2009.

- [82] A. A. J. Marley, R. D. Luce, and I. Kocsis. A solution to a problem raised in Luce and Marley (2005). *J. Math. Psych.*, 52(1):64–68, 2008.
- [83] L. Molnár. *Selected Preserver Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces*, volume 1895 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [84] L. Molnár. Isometries of the spaces of bounded frame functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 338(1):710–715, 2008.
- [85] L. Molnár. Maps on states preserving the relative entropy. *J. Math. Phys.*, 49(3):032114, 4, 2008.
- [86] L. Molnár. Maps on the  $n$ -dimensional subspaces of a Hilbert space preserving principal angles. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(9):3205–3209, 2008.
- [87] L. Molnár. Linear maps on matrices preserving commutativity up to a factor. *Linear Multilinear Algebra*, 57:13–18, 2009.
- [88] L. Molnár. Maps on positive operators preserving Lebesgue decompositions. *Electron. J. Linear Algebra*, 18:222–232, 2009.
- [89] L. Molnár. Maps preserving the geometric mean of positive operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(5):1763–1770, 2009.
- [90] L. Molnár. Maps preserving the harmonic mean or the parallel sum of positive operators. *Linear Algebra Appl.*, 430(11-12):3058–3065, 2009.
- [91] L. Molnár. Thompson isometries of the space of invertible positive operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 137(11):3849–3859, 2009.
- [92] L. Molnár. Linear maps on observables in von Neumann algebras preserving the maximal deviation. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 81(1):161–174, 2010.
- [93] L. Molnár and G. Nagy. Thompson isometries on positive operators: the 2-dimensional case. *Electron. J. Linear Algebra*, 20:79–89, 2010.
- [94] L. Molnár and P. Szokol. Maps on states preserving the relative entropy II. *Linear Algebra Appl.*, 432(12):3343–3350, 2010.
- [95] L. Molnár and W. Timmermann. Mixture preserving maps on von Neumann algebra effects. *Lett. Math. Phys.*, 79(3):295–302, 2007.
- [96] L. Molnár and W. Timmermann. Maps on quantum states preserving the Jensen–Shannon divergence. *J. Phys. A*, 42(15301):015301, 9, 2009.
- [97] L. Molnár and W. Timmermann. A metric on the space of projections admitting nice isometries. *Studia Math.*, 191(3):271–281, 2009.
- [98] L. Molnár and P. Šemrl. Elementary operators on self-adjoint operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 327(1):302–309, 2007.
- [99] L. Molnár and P. Šemrl. Spectral order automorphisms of the spaces of Hilbert space effects and observables. *Lett. Math. Phys.*, 80(3):239–255, 2007.
- [100] F. Mészáros. A functional equation related to characterization problems. *Math. Pannon.*, 20(1):129–138, 2009.
- [101] F. Mészáros. A functional equation and its application to the characterization of gamma distributions. *Aequationes Math.*, 79:53–59, 2010.
- [102] F. Mészáros. *Függvényegyenletek és karakterizációs problémák*. Ph.d. thesis, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2010.
- [103] K. Nikodem and Zs. Páles. Generalized convexity and separation theorems. *J. Convex Anal.*, 14(2):239–248, 2007.
- [104] K. Nikodem and Zs. Páles. Note on  $t$ -quasiaffine functions. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 29:127–139, 2008.
- [105] K. Nikodem and Zs. Páles. Minkowski sums of Cantor-type sets. *Colloq. Math.*, 119(1):95–108, 2010.
- [106] Á. Orosz and L. Székelyhidi. Moment functions on Sturm-Liouville hypergroups. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 29:141–156, 2008.
- [107] Zs. Páles. On functional equations characterizing polynomials. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 74:581–592, 2008.
- [108] J. Pék and J. Szilasi. Automorphisms of Ehresmann connections. *Acta Math. Hungar.*, 123(4):379–395, 2009.
- [109] J. Szilasi. Calculus along the tangent bundle projection and projective metrizable. In *Differential geometry and its applications*, pages 539–558. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008.

- [110] J. Szilasi and R. L. Lovas. Some aspects of differential theories. In *Handbook of global analysis*, pages 1069–1114, 1217. Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2008.
- [111] L. Székelyhidi. D'Alembert's functional equation on compact groups. *Banach J. Math. Anal.*, 1(2):221–226, 2007.
- [112] L. Székelyhidi. Spectral synthesis on multivariate polynomial hypergroups. *Monatsh. Math.*, 153(2):145–152, 2008.
- [113] A. Varga. On a functional equation containing four weighted arithmetic means. *Banach J. Math. Anal.*, 2(1):21–32, 2008.
- [114] A. Varga and Cs. Vincze. On a functional equation containing weighted arithmetic means. In C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, M. Plum, and Zs. Páles, editors, *Inequalities and Applications (Noszvaj, 2007)*, volume 157 of *International Series of Numerical Mathematics*, pages 305–315. Birkhäuser Verlag, 2008.
- [115] A. Varga and Cs. Vincze. On a lower and upper bound for the curvature of ellipses with more than two foci. *Expo. Math.*, 26(1):55–77, 2008.
- [116] A. Varga and Cs. Vincze. On Daróczy's problem for additive functions. *Publ. Math. Debrecen*, 75:299–310, 2009.
- [117] Zs. Ádám and K. Lajkó. Further sequenced problems for functional equations. In *Proc. 8th Internat. Conf. "Matematika v škole dnes a zajtra"*, pages 49–58, Ružomberok, 2007.
- [118] Zs. Ádám, K. Lajkó, Gy. Maksa, and F. Mészáros. Two functional equations on group. *Ann. Math. Sil.*, 21:7–13, 2007.